受験数学基礎力チェック

名前＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1. $\left\{\sqrt{5}-\sqrt{3}\right\}^3$ を展開して整理せよ。

考え方　暗算が利いても一行目だけは公式 $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ に代入するほうがミスが少ない。

○　解答

$$\left\{\sqrt{5}-\sqrt{3}\right\}^3=5\sqrt{5}-3\cdot5\cdot\sqrt{3}+3\cdot\sqrt{5}\cdot3-3\sqrt{3}=\underline{14\sqrt{5}-18\sqrt{3}}$$

2. 二次関数 $y=x^2+2ax-4x+a^2$ の頂点の座標を求めよ。

考え方　右辺を $x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$ を用いて平方完成するわけだが、この場合、$2a$ に相当する部分が $2a-4$ であるとみなして、$(a-2)^2$ を加えて因数分解の公式に適用する。ただし、勝手に加えた $(a-2)^2$ は続けて引いて式の変化を消す。引いた $(a-2)^2$ は定数部として処理する。

○　解答

$$\begin{aligned}y&=x^2+2(a-2)x\underline{+(a-2)^2-(a-2)^2}+a^2\\&=\underline{x^2+2(a-2)x+(a-2)^2}-(a-2)^2+a^2\\&=\{x+(a-2)\}^2-(a^2-4a+4)+a^2\\&=(x+a-2)^2+4a-4\end{aligned}$$

より頂点は $\underline{(-a+2,4a-4)}$

3. $(6a^2b)^3\div(-3ab)^5$ を簡単にせよ。

考え方　最初に符号、次に整数部を決めてしまってから文字部を数える。$-$ は全体で 5 個だから全体はマイナス、次に文字部を分子分母に分散して約分する。

○　解答

$$(6a^2b)^3\div(-3ab)^5=-\frac{6^3a^6b^3}{3^5a^5b^5}=\underline{-\frac{8a}{9b^2}}$$

4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(9k^2-4k+1)$ の $\sum$ を展開して整理せよ。

考え方　　$\sum$ の公式を適用して整理してゆくのだが、共通因数に上手に着目して共通因数をくくりだしながら進めるのがミスが少ない。

○　解答

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(9k^2-4k+1) &= 9\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n\\ &= \frac{1}{2}n\{3(2n^2+3n+1)-4(n+1)+2\}\\ &= \frac{1}{2}n(6n^2+9n+3-4n-4+2) = \underline{\frac{1}{2}n(6n^2+5n+1)}\end{aligned}$$

5. 不等式 $2|x-3| \leqq x+2$ を解け。

考え方　　いくつかの手順はあるが、｜絶対値｜はその内部の正負で場合分けをするのが面倒でも確実。これを正確にできるようにしておくと応用が効く。

○　解答

$x \geqq 3$ で $x-3 \geqq 0$,　$x<3$ で $x-3<0$ であるから、

i)　$x \geqq 3$ で $|x-3| = x-3$ であるから、与式は

$2(x-3) \geqq x+2$ これを整理して $x \geqq 8$

これは $x \geqq 3$ を満たす。

ii)　$x<3$ で $|x-3| = -(x-3)$ であるから、与式は

$-2(x-3) \geqq x+2$ これを整理して $x < \dfrac{4}{3}$

これは $x<3$ を満たす。

$i)\cdot ii)$ より、不等式を満たす x の範囲は $\underline{x \geqq 8}$ および $\underline{x < \dfrac{4}{3}}$ である。